

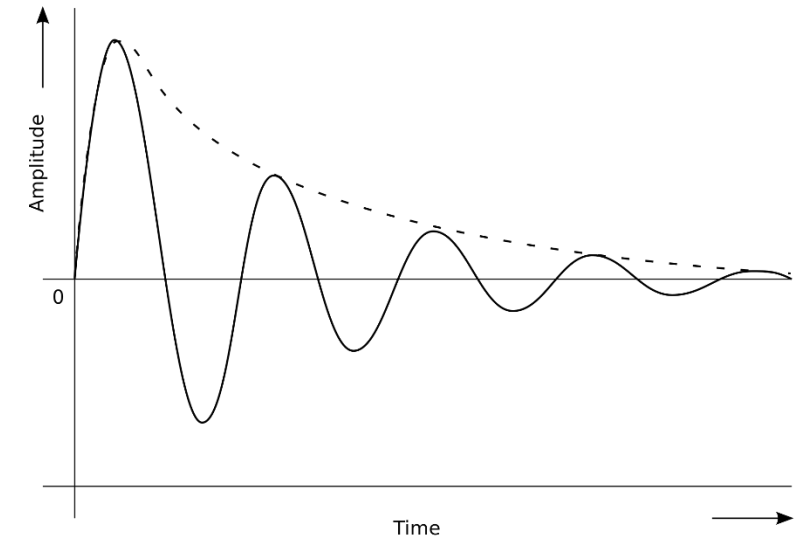


Cours 17 – 13/11/2024

8. L'oscillateur harmonique linéaire

8.5. Résolution de l'équation différentielle de mouvement de l'oscillateur amorti

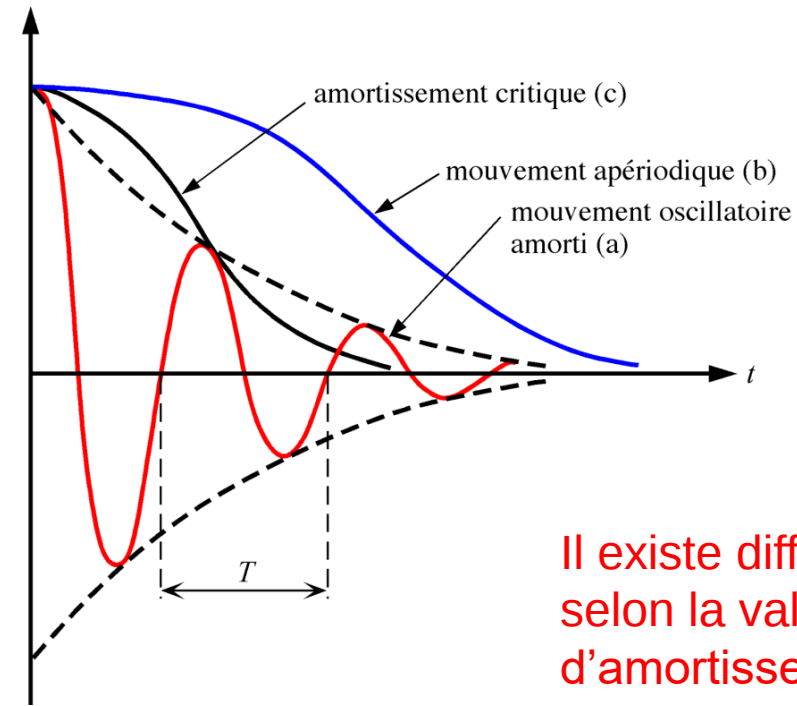
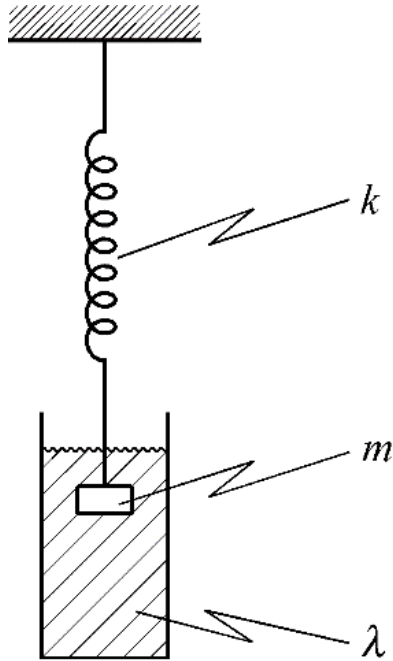
8.6. Solutions de l'oscillateur amorti





8.5. Résolution de l'équation différentielle de mouvement...

■ Oscillateur amorti : Ressort avec masse plongeant dans un liquide



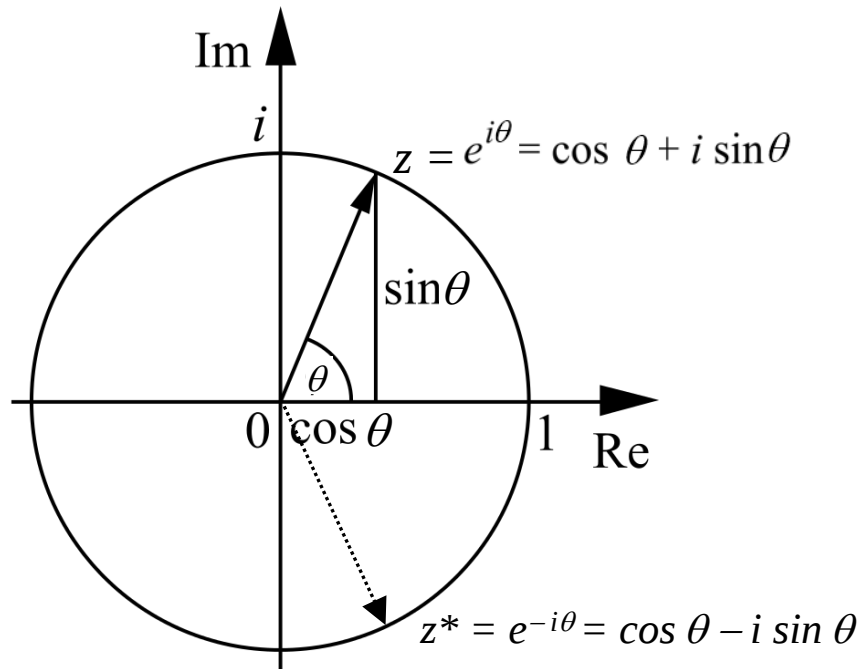
Il existe différents régimes
selon la valeur du coefficient
d'amortissement λ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Comment résoudre cette équation différentielle ?
⇒ On passe par les nombres complexes



■ Nombres complexes



Soit le nombre complexe z de norme 1 :

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z^* = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \operatorname{Im}\{e^{i\theta}\} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right.$

Nous pouvons alors écrire $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \frac{e^{i(\omega t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega t + \varphi_0)}}{2} = \frac{A}{2} e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega t}$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

avec C_1, C_2 des nombres complexes indépendants du temps



8.5. Résolution de l'équation différentielle de mouvement...

■ Technique de résolution

- Equation **Homogène** (sans second membre)

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0 \text{ avec } a, b, c = \text{cte}$$

Solutions: polynôme caractéristique : $aX^2 + bX + c = 0$ discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$: alors l'équation caractéristique admet 2 racines réelles γ_1 et γ_2 avec $\gamma_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
la solution est de la forme : $y = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

- si $\Delta = 0$: alors l'équation caractéristique admet 1 racine réelle γ avec $\gamma = \frac{-b}{2a}$
la solution est de la forme : $y = (At + B)e^{\gamma t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

- si $\Delta < 0$: alors l'équation caractéristique admet 2 racines complexes γ_1 et γ_2 telles que $\gamma_1 = \gamma + i\omega$ et $\gamma_2 = \gamma - i\omega$
ou encore $\gamma_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\gamma_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (en notation complexe : $i^2 = -1$)

la solution est
de la forme :

(différentes écritures
pour une même solution)

$$y = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}$$

$$y = [A' \cos \omega t + B' \sin \omega t] e^{\gamma t}$$

$$y = A'' \cos(\omega t + \phi) e^{\gamma t}$$

avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

avec A' et B' des constantes définies par les conditions initiales

avec A'' et ϕ des constantes définies par les conditions initiales



8.5. Résolution de l'équation différentielle de mouvement...

■ Technique de résolution

- Equation avec **second membre**

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = d \quad \text{avec } a, b, c, d = \text{cte}$$

Solutions

$$y = y_g + y_p$$

Solution générale de l'équation différentielle sans second membre

Solution particulière
 $y(t \rightarrow \infty) = y_p$

Solutions

polynôme caractéristique : $aX^2 + bX + c = 0$ racines : $\gamma_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$: alors l'équation caractéristique admet 2 racines réelles γ_1 et γ_2

la solution est de la forme: $y = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

- si $\Delta = 0$: alors l'équation caractéristique admet 1 racine réelle γ

la solution est de la forme: $y = (At + B)e^{\gamma t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

- si $\Delta < 0$: alors l'équation caractéristique admet 2 racines complexes γ_1 et γ_2 telles que $\gamma_1 = \gamma + i\omega$ et $\gamma_2 = \gamma - i\omega$

la solution est de la forme:

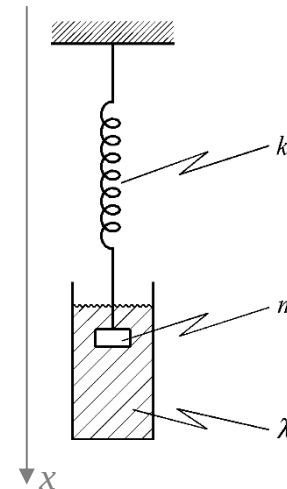
$$y = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t} \quad \text{avec A et B des constantes définies par les conditions initiales}$$

$$y = [A' \cos \omega t + B' \sin \omega t] e^{\gamma t} \quad \text{avec A' et B' des constantes définies par les conditions initiales}$$

(différentes écritures pour une même solution)

$$y = A'' \cos(\omega t + \phi) e^{\gamma t} \quad \text{avec A'' et } \phi \text{ des constantes définies par les conditions initiales}$$

Exemple : oscillateur amorti avec force de gravitation



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = g$$

Amortissement faible

$$x = e^{-\lambda t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) + x_p$$

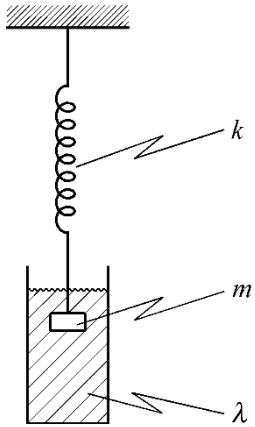
$$x(t \rightarrow \infty) = x_p = \frac{mg}{k}$$

Solution : $x = e^{-\lambda t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) + \frac{mg}{k}$



8.6. Solutions de l'oscillateur amorti

■ Solution générale avec Equation différentielle homogène



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad aX^2 + bX + c = 0$$

avec $a = 1, b = 2\lambda, c = \omega_0^2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

soit
$$\begin{cases} \gamma_1 = -\lambda + (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} \\ \gamma_2 = -\lambda - (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} \end{cases}$$

La solution générale est la somme des solutions particulières avec γ_1 et γ_2

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} \quad \text{avec } A_1 \text{ et } A_2 \text{ des constantes} \\ &= e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) \end{aligned}$$

remarque : seulement si $\Delta \neq 0$



8.6. Solutions de l'oscillateur amorti

■ Amortissement faible $\lambda < \omega_0$

Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

avec $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ ($\lambda < \omega_0$)

En notation complexe : $-1 = i^2$

d'où $\lambda^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2 (\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2 \omega^2$ avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

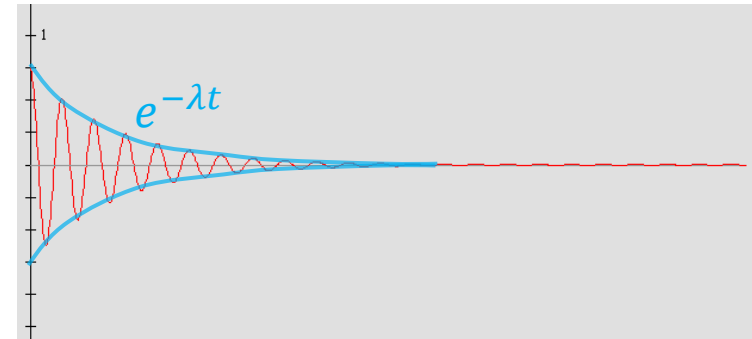
Il existe donc deux valeurs pour γ : $\gamma_1 = -\lambda + i\omega$ et $\gamma_2 = -\lambda - i\omega$

La solution générale est la somme des solutions particulières γ_1, γ_2 : $x(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$

soit $x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$ avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

ou encore $x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$

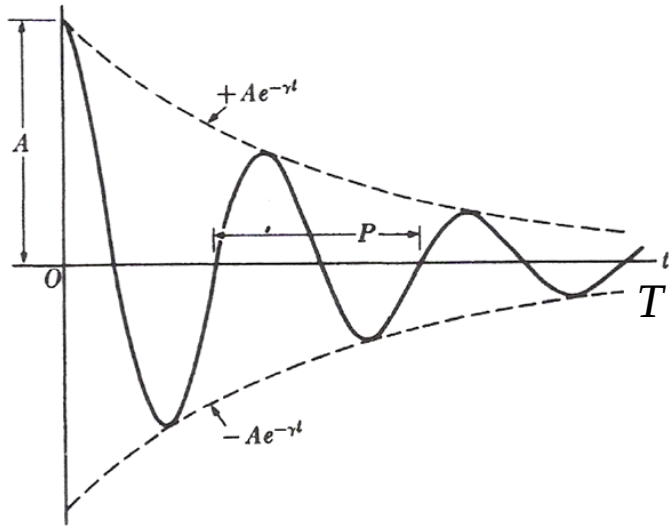
Cette solution décrit un mouvement oscillatoire amorti, dont l'amplitude décroît avec le temps selon $e^{-\lambda t}$ et avec une pulsation $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$ qui est plus petite que ω_0





8.6. Solutions de l'oscillateur amorti

■ Amortissement faible $\lambda < \omega_0$



Solution de l'équation du mouvement :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ pulsation de l'oscillateur amorti

on peut remarquer que $\omega < \omega_0$

On détermine les constantes A et ϕ à partir des conditions initiales à $t = 0$

Exemple de conditions initiales à $t=0$: $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$

$$x(0) = A \cos \phi = x_0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x_0}{\cos \phi}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(-\lambda) \cos(\phi) - A\omega \sin(\phi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \phi = -\frac{\lambda}{\omega}$$



8.6. Solutions de l'oscillateur amorti

■ Amortissement fort $\lambda > \omega_0$

Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

avec $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$ ($\lambda > \omega_0$)

soit $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm \omega$ avec $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

Il existe donc deux valeurs pour γ : $\gamma_1 = -\lambda + \omega$ et $\gamma_2 = -\lambda - \omega$

La solution générale est la somme des solutions particulières γ_1, γ_2 : $x(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$

Les solutions sont alors $x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$

*Mouvement apériodique
(plus d'oscillations)*

avec $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

Les constantes sont définies par les conditions initiales à $t=0$

Par exemple : $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$

alors $A_1 = x_0 \frac{\omega + \lambda}{2\omega}$, $A_2 = x_0 \frac{\omega - \lambda}{2\omega}$



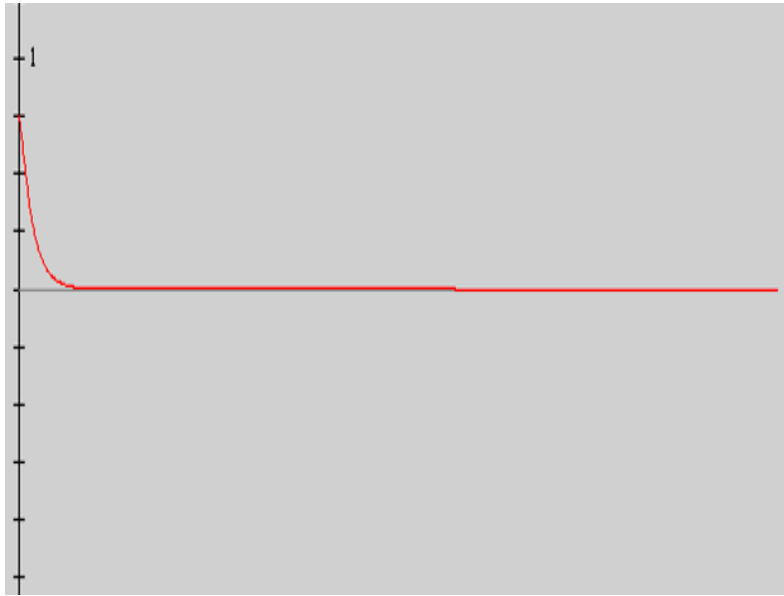


8.6. Solutions de l'oscillateur amorti

■ Amortissement critique $\lambda = \omega_0$

Dans ce cas particulier $\Delta=0$, et les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$$



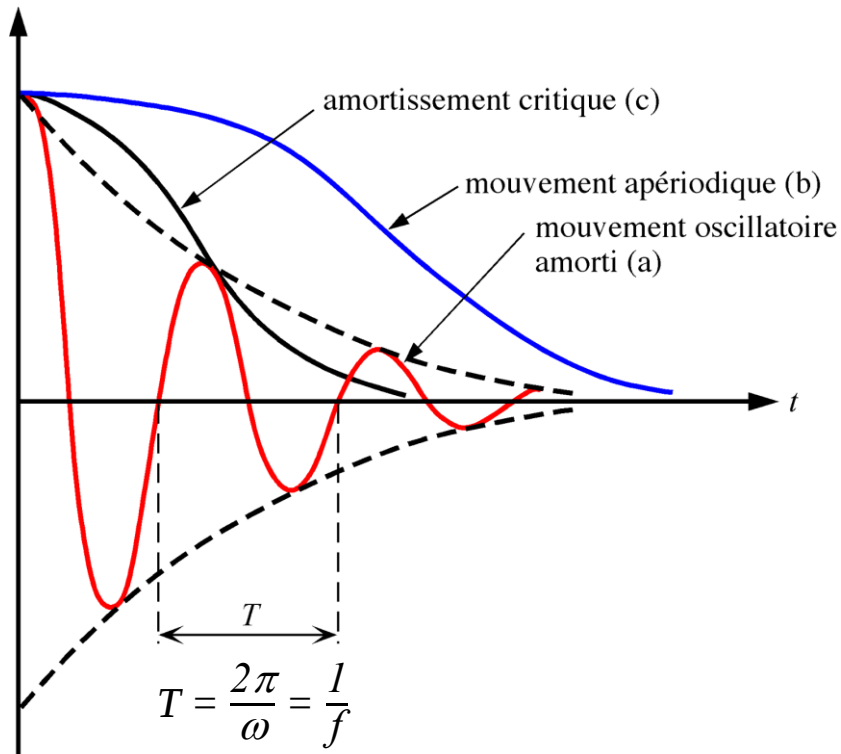
Amortissement critique : retour à la position d'équilibre sans aucune oscillation

8.6. Solutions de l'oscillateur amorti



■ Solutions pour les différents régimes d'amortissement en fonction de λ

avec $\lambda = \frac{K\eta}{2m}$ coefficient d'amortissement

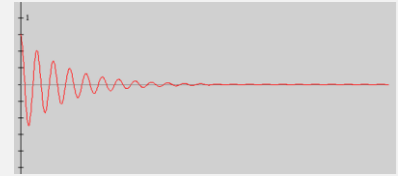


- **Amortissement faible :** $\lambda < \omega_0$

Mouvement oscillatoire avec amplitude décroissante et avec $\omega < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$ et donc $\omega < \omega_0$

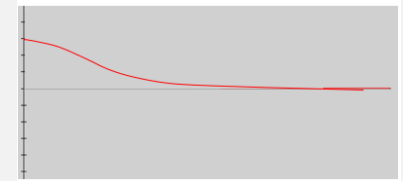


- **Amortissement fort :** $\lambda > \omega_0$

Mouvement aperiodique (plus d'oscillations)

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$$

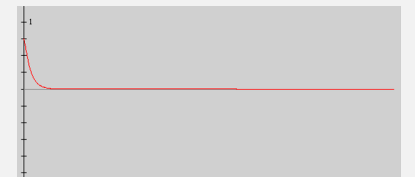
avec $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$



- **Amortissement critique :** $\lambda = \omega_0$

Retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans aucune oscillation

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$$

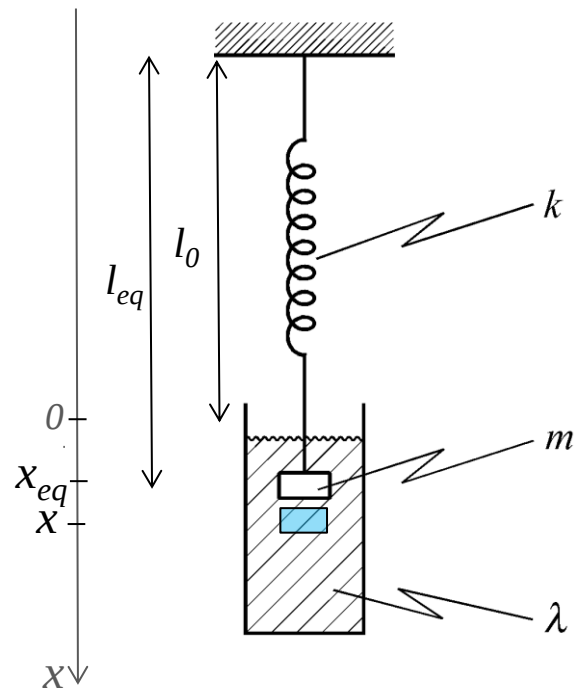


8.6. Solutions de l'oscillateur amorti



■ Exemple : Ressort avec masse plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède

Equation différentielle du mouvement :



Force de frottement fluide
2nd loi de Newton : $m\vec{a} = -k\vec{r} + m\vec{g} - K\eta\vec{v} - M\vec{g}$ avec $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e}_x = x\vec{e}_x$
Poussée d'Archimède

On projette sur Ox : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg - K\eta \frac{dx}{dt} - Mg$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\lambda \frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m}g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

Remarque : on peut faire le changement de variable et se retrouver avec une équation différentielle homogène

Equation différentielle du 2^{ème} ordre avec 2nd membre :

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = d \quad \text{avec} \quad a, b, c, d = cte$$

Solution : $y = y_g + y_p$

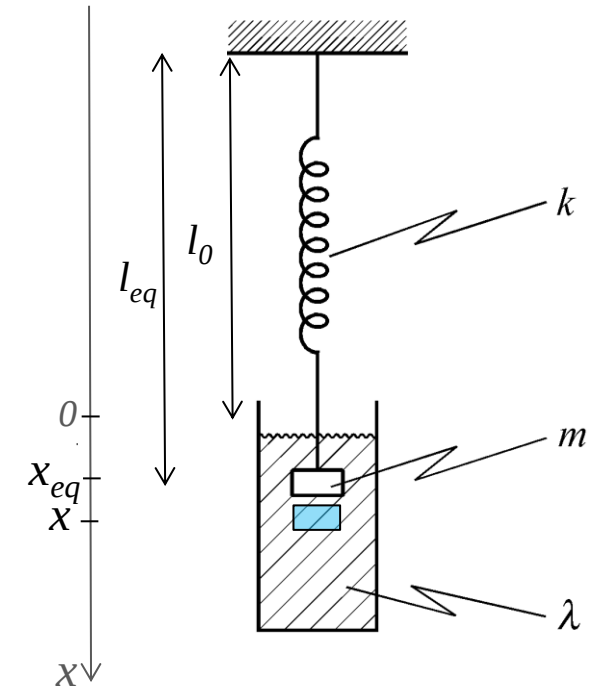
Solution générale de l'équation différentielle sans second membre

Solution particulière

8.6. Solutions de l'oscillateur amorti



■ Exemple : suite...



Equation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Solution générale : $x(t) = e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right)$

Equation différentielle du mouvement avec 2nd membre :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\lambda \frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m} g$$

Solution particulière : pour $t \rightarrow \infty$, la masse est immobile à sa position d'équilibre x_{eq}

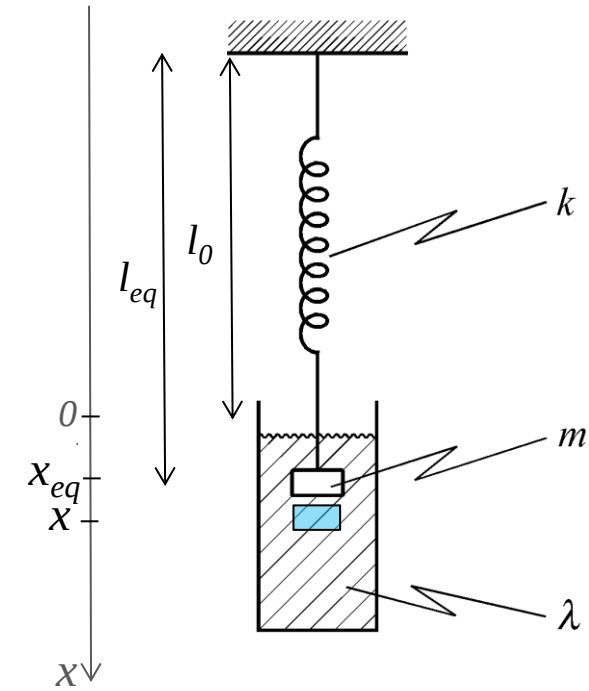
On a donc $0 + \omega_0^2 x + 2\lambda 0 = \frac{m-M}{m} g$

Soit $x = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{m-M}{m} g = \frac{m-M}{k} g = x_{eq}$

8.6. Solutions de l'oscillateur amorti



■ Exemple : suite...



Solution :

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) + x_{eq}$$

Si $\lambda < \omega_0$ (amortissement faible) alors la solution devient :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq} \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

On tire sur la masse et elle est lâchée de la position x_0 sans vitesse initiale :

Conditions initiales à $t=0$: $x(0)=x_0$ et $v(0)=0$

$$x(0)=x_0 \Rightarrow A \cos(\omega \cdot 0 + \phi) + x_{eq} = x_0 \text{ d'où } A = \frac{x_0 - x_{eq}}{\cos \phi}$$

$$v(0)=0 \Rightarrow A(-\lambda)e^{-\lambda \cdot 0} \cos(\omega \cdot 0 + \phi) - A e^{-\lambda \cdot 0} \omega \sin(\omega \cdot 0 + \phi) = 0 \text{ d'où } \tan \phi = \frac{-\lambda}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{x_0 - x_{eq}}{\cos \phi} e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq} \text{ avec } \phi = \arctan \frac{-\lambda}{\omega}$$

